

Лекция 7

Метод фон Неймана

$$f_i^n = V_n e^{li\theta} \quad I = \sqrt{-1} \quad \theta = k\Delta x \quad k_x = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$f_{i\pm 1}^{n+1} = V_{n+1} e^{I(i\pm 1)\theta}$$

Условие устойчивости:

$$\left| \frac{V_{n+1}}{V_n} \right| \leq 1$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + d (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n)$$

$$V_{n+1} e^{li\theta} = V_n e^{li\theta} - \frac{C}{2} (V_n e^{I(i+1)\theta} - V_n e^{I(i-1)\theta}) +$$

$$+ d (V_n e^{I(i+1)\theta} + V_n e^{I(i-1)\theta} - 2V_n e^{li\theta})$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} e^{I\theta} = e^{li\theta} - \frac{C}{2} (e^{I\theta} e^{i\theta} - e^{I\theta} e^{-i\theta}) +$$

$$+ d (e^{I\theta} e^{i\theta} + e^{I\theta} e^{-i\theta} - 2e^{li\theta})$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{C}{2} (e^{I\theta} - e^{-I\theta}) + d(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{I\theta} - e^{-I\theta}}{2I} \quad \cos \theta = \frac{e^{I\theta} + e^{-I\theta}}{2}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{C}{2} 2I \sin \theta + d(2 \cos \theta - 2) \quad z = x + iy$$

$$\left| \frac{V_{n+1}}{V_n} \right| = \left| \underbrace{1 - 2d(1 - \cos \theta)}_x - \underbrace{IC \sin \theta}_y \right| \leq 1 \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cancel{1} - 4d(1 - \cos \theta) + 4d^2(1 - \cos \theta)^2 + C^2 \sin^2 \theta \leq \cancel{1} \quad \downarrow$$

$$1 - \cos^2 \theta$$

$$-4d(1 - \cos \theta) + 4d^2(1 - \cos \theta)^2 + C^2(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \leq 0$$

$$-4d + 4d^2(1 - \cos \theta) + C^2(1 + \cos \theta) \leq 0$$

$$a) \cos \theta = -1: \quad -4d + 8d^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 2d \leq 1 \quad \Rightarrow \quad d \leq 1/2 \quad (1)$$

$$b) \cos \theta = 1: \quad 2C^2 \leq 4d \quad \Rightarrow \quad C^2 \leq 2d \quad \Rightarrow \quad C \leq 1 \quad (2)$$

Полученные условия устойчивости (1) и (2) частично совпали с условиями, полученными методом дискретных возмущений.

Метод практической устойчивости

$$f_i^{n+1} = Af_i^n + Bf_{i+1}^n + Cf_{i-1}^n$$

Условия

устойчивости:

1) $A \geq 0$, 2) $B \geq 0$, 3) $C \geq 0$,

4) $A + B + C \leq 1$

$$f_i^{n+1} = \underline{f_i^n} - \frac{C}{2} (\underline{f_{i+1}^n} - \underline{f_{i-1}^n}) + d (\underline{f_{i+1}^n} + \underline{f_{i-1}^n} - \underline{2f_i^n})$$

$$f_i^{n+1} = (1 - 2d)f_i^n + \left(d - \frac{C}{2}\right)f_{i+1}^n + \left(d + \frac{C}{2}\right)f_{i-1}^n$$

1) $1 - 2d \geq 0 \Rightarrow d \leq 1/2$

2) $d - C/2 \geq 0 \Rightarrow d - C/2 \geq 0 \Rightarrow C \leq 2d \Rightarrow C \leq 1$

3) $d + C/2 \geq 0$ - выполняется
всегда

4) ~~$1 - 2d + d - C/2 + d + C/2 \leq 1$~~